数理解析研究所講究録
322巻 1978年 124-153

一階様相述語論理の機械的定理証明について

静岡大学　工学部　鈴木淳之
中松和己

第0章

〔序〕　情報処理技術の応用分野を自然言語にも拡げるには、計算機構の研究に意味論的考察が必須であり、それ故、様相諸概念の導入及びその数学的研究、処理技術の取り入れも必要となる．しかし、様相論理（内包的論理）は、その解釈において、通常の外延的論理に比べ、難解で複雑である．そこで、本研究では、完全な様相論理のセマンティックスを外延的論理で表現し、様相論理を外延的論理に還元し、その応用として、一階様相述語論理の定理証明を、二種類の領域（*domain*）をもつ、外延的一階述語論理における導出原理を使い、機械的に行なうことを試みた．様相論理には種々の体系があるが、ここでは、*C. I. Lewis* の分類による、様相命題論理の体系 $S5$ に相当する、一階様相述語論理の体系を使用した．

第1章

まず、一階様相述語論理（以下 MLPC と略す.）と、それを翻訳する外延的一階述語論理（以下 ELPC と略す.）の、シンタックスとセマンティックスを各々定義する。

1.1 〔一階様相述語論理（MLPC）の定義〕

〔基本記号〕

1. 対象変数　$x, y, z, \cdots, x_1, x_2, \cdots$
2. 対象定数　$a, b, c, \cdots, a_1, a_2, \cdots$
3. 関数記号　$f, g, h, \cdots, f_1, f_2, \cdots$
4. 述語記号　$P, Q, R, \cdots, P_1, P_2, \cdots$
5. 記号　$\sim, \vee, \forall, N$（様相記号），（，）

〔項（term）の定義〕

1. 対象変数と対象定数は、term である.
2. $t_1, \cdots, t_n$ が term なら、$f(t_1, \cdots, t_n)$ は term である.（ここで、f は n 変数関数記号.）
3. 1, 2 で定義されたものだけが term である.

〔論理式（well formed formula : wff）の定義〕

1. P を n 変数述語記号、$t_1, \cdots, t_n$ を term とすると、$P(t_1, \cdots, t_n)$ は wff である.
2. A を wff とすると、$\sim A$ は wff である.

3. AとBを wff とすると、$A \vee B$は wff である.

4. Aを wff、xを対象変数とすると、$(\forall x)A$は、wff である.（$(\forall x)A$を、$(x)A$とも書く.）

5. Aを wff とすると、NAは wff である.

6. 1.～5.で定義されたものだけが wff である.

〔略記〕

$A \wedge B \equiv_{Df} \sim(\sim A \vee \sim B)$

$A \supset B \equiv_{Df} \sim A \vee B$

$A \equiv B \equiv_{Df} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

$(\exists x)A \equiv_{Df} \sim(\forall x)\sim A$

$\Diamond A \equiv_{Df} \sim N \sim A$

〔公理〕

1. $(A \vee B) \supset A$

2. $B \supset (A \vee B)$

3. $(A \vee B) \supset (B \vee A)$

4. $(B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset (A \vee C))$

5. $(x)P(x) \supset P(t)$

   （ここで、xは任意の対象変数、tは$P(x)$の中でxに対して自由である項）

6. $NA \supset A$

7. $N(A \supset B) \supset (NA \supset NB)$

8. $\Diamond A \supset N \Diamond A$

〔推論規則〕

xを任意の対象変数、p, qを任意のwffとすると、

1. $\vdash p \supset q \rightarrow \vdash p \supset (x) q$

(ここで、xはpの中で自由でない.)

2. (分離法則(MP))

$\vdash p,\ \vdash p \supset q \rightarrow \vdash q$

3. $\vdash p \rightarrow \vdash Np$

〔MLPCのセマンティックス〕

〔モデルの定義〕

MLPCのモデルは、次の4順序対で表わされる.

$\langle \mathbb{W}, R, \mathbb{D}, \mathbb{V} \rangle$

$\mathbb{W}$. : possible world の集合

R. : $\mathbb{W}$の要素間の関係(S5である故、同値関係)

$\mathbb{D}$、: 対象領域(domain)

$\mathbb{V}$、: 次の条件を満たす付値(value assignment)

xが変数のとき、$\mathbb{V}(x)$は$\mathbb{D}$の中のある要素.

aが定数のとき、$\mathbb{V}(a)$は$\mathbb{D}$の中のある要素.

fがn変数関数のとき、$\mathbb{V}(f)$は$\mathbb{D}^n$($\mathbb{D}$のn個の直積)

から$\mathbb{D}$への一意写像で、次の条件を満たす.

$$V(f(t_1,\cdots,t_n))=V(f)(V(t_1),\cdots,V(t_n))$$

Pをn変数述語とすると、$V(P)$は$\langle u_1,\cdots,u_n,w_i\rangle$なる形をしたn+1順序対の集合、ここで$u_i\in D, w_i\in W$.

MLPCの任意のwff Aに対して、world w_iに対する値$V(A,w_i)$を定義する.

1. Aが原子式、Pがn変数述語、t_i($1\leq i\leq n$)が項のとき、任意の$w_i\in W$に対し、

$$\begin{cases} V(P(t_1,\cdots,t_n),w_i)=1 & \langle V(t_1),\cdots,V(t_n),w_i\rangle \in V(P)\text{のとき.} \\ V(P(t_1,\cdots,t_n),w_i)=0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. Aを任意のwffとするとき、任意の$w_i\in W$に対し、

$$\begin{cases} V(\sim A,w_i)=1 & V(A,w_i)=0\text{のとき.} \\ V(\sim A,w_i)=0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

3. A, Bを任意のwffとする、任意の$w_i\in W$に対し、

$$\begin{cases} V(A\vee B,w_i)=1 & V(A,w_i)=1\text{ または、}V(B,w_i)=1\text{のとき.} \\ V(A\vee B,w_i)=0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. Aを任意のwff、xを対象変数とするとき、任意の$w_i\in W$に対し、

$V((\forall x)A,w_i)=1$　　x以外のすべての項の付値に対しては、Vと同じであ

$$
\begin{cases}
 & \text{る．すべての } V' \text{ に対し、} \\
 & V'(A, w_i)=1 \\
V((\forall x)A, w_i)=0 & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

5．A を任意の wff とする．任意の $w_i \in W$ に対し、

$$
\begin{cases}
V(NA, w_i)=1 & w_iRw_j \text{ となるすべての } w_j \in W \\
 & \text{に対して、} V(A, w_j)=1 \\
V(NA, w_i)=0 & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

1.2.〔二種類の領域をもつ外延的一階述語論理（ELPC）の定義〕

ここで、MLPC を翻訳する外延的論理 ELPC を定義するが、このELPC は対象領域Ⅰ，Ⅱ（D_1，D_2）をもち、各々の領域に対応して、二種類の変数、定数、関数記号が存在する．関数については、D_1からD_2，D_2からD_1への写像は、存在しない．

〔基本記号〕

1、対象変数Ⅰ．$x, y, z, ---$；対象変数Ⅱ．$\kappa, \lambda, \mu, ---$

2、対象定数Ⅰ．$a, b, c, ---$；対象定数Ⅱ．$\alpha, \beta, \gamma, ---$

3、関数記号Ⅰ．$f, g, h, ---$，関数記号Ⅱ．$f', g', h', ---$

4．述語記号　$P, Q, R, ---$

5．記号　$\sim, \vee, \forall$

〔項（term）の定義〕

1、対象変数Ⅰと対象定数Ⅰはterm Ⅰである.

対象変数Ⅱと対象定数Ⅱはterm Ⅱである.

2. $t_1, ---, t_n$ が term Ⅰなら、$f(t_1, ---, t_n)$ は term Ⅰである.（ここで、f は n 変数関数記号Ⅰ）

$t'_1, ---, t'_n$ が term Ⅱなら、$f'(t'_1, ---, t'_n)$ は term Ⅱである.（ここで、f' は n 変数関数記号Ⅱ）

3、1, 2で定義されたものだけがtermである.

〔論理式（well formed formula：wff）の定義〕

1、P を n 変数述語記号、$t''_1, ---, t''_n$ を term Ⅰまたは term Ⅱとすると、$P(t''_1, ---, t''_n)$ は wffである.

2、A を wff とすると、$\sim A$ は wffである.

3. A と B を wff とすると、$A \vee B$ は wffである.

4. A を wff，x を対象変数Ⅰ，K を対象変数Ⅱとすると、$(\forall x)A$，$(\forall K)A$ は wffである.

（$(\forall x)A$，$(\forall K)A$ は各々、$(x)A$，$(K)A$ とも書く.）

5. 1.～4. で定義されたものだけがwffである.

〔公理〕

1.～4.は、MLPCの公理と同じ.

5. $(x)P(x) \supset P(t)$

5'. $(K)P(K) \supset P(t')$

（ここで、x，Kは、各々対象変数Ⅰ,Ⅱ．t, t'は、各々、$P(x)$, $P(K)$の中で自由であるtermⅠ,Ⅱ）

［推論規則］

x，Kを各々任意の対象変数Ⅰ,Ⅱとし、P, qを任意のwffとすると、

1、　$\vdash P \supset q \longrightarrow \vdash P \supset (x) q$

（ここで、xはPの中で自由でない．）

1'、　$\vdash P \supset q \longrightarrow \vdash P \supset (K) q$

（ここで、KはPの中で自由でない．）

2、（分離法則（MP））、P, qを任意のwffとする．

$\vdash P$, $\vdash P \supset q \longrightarrow \vdash q$

［ELPCのセマンティックス］

［モデルの定義］

ELPCのモデルは、次の3順序対で表わされる．

$\langle D_1, D_2, V \rangle$

D_1　：　対象領域Ⅰ

D_2　：　対象領域Ⅱ

V　：　次の条件を満たす付値（value assignment）

xが対象変数Ⅰのとき、$V(x)$はD_1のある要素．

Kが対象変数Ⅱのとき、$V(K)$はD_2のある要素．

a が対象定数 I のとき、$V(a)$ は D_1 のある要素.

α が対象定数 II のとき、$V(\alpha)$ は D_2 のある要素.

f が n 変数関数記号 I のとき、$V(f)$ は D_1^n から D_1 への一意写像.

f' が n 変数関数記号 II のとき、$V(f')$ は D_2^n から D_2 への一意写像.

P が n 変数述語のとき、$V(P)$ は $\langle u_1, ---, u_n \rangle$ なる n 順序対の集合. ここで、$u_i \in D_1$ または $u_i \in D_2$ $(1 \leq i \leq n)$

任意の ELPC の wff A に対し、値 $V(A)$ を定義する.

1、A が原子式のとき、P を n 変数述語記号、t_i'' $(1 \leq i \leq n)$ を term I または term II とすると、

$$\begin{cases} V(P(t_1'', ---, t_n'')) = 1 & \langle V(t_1''), ---, V(t_n'') \rangle \in V(P) \text{ のとき.} \\ V(P(t_1'', ---, t_n'')) = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A, B を任意の wff、x, K を各々対象変数 I, II とする.

2、$\sim A$, 3. $A \vee B$, 4. $(x)A$, $(K)A$ に対する付値は、MLPC の場合と同様に定義される.

第2章

第1章で定義された MLPC を、ELPC に翻訳する規則を定義し、その規則の完全性(定理の保存性)を示す.

2.1〔MLPCのELPCへの翻訳規則＊〕

MLPCのモデルを、ELPCで表現することにより、MLPCのELPCへの翻訳規則＊を、次のように定義する．MLPCの対象領域$\mathcal{D}$に対し、ELPCの対象領域$\mathcal{D}_1$，MLPCのpossible worldの集合$\mathcal{W}$に対し、ELPCの対象領域$\mathcal{D}_2$を対応させ、必然性を表わす様相記号Nに対しては、S5の特性（$\mathcal{W}$における関係Rの同値性）より、ELPCの対象領域$\mathcal{D}_2$に対する全称記号を対応させる．従って、変数ⅡKは、possible worldを表わすことになる．

〔Rule＊〕

(MLPC)	$\xrightarrow{*}$	(ELPC)
1、x（対象変数）		x^*，a^*，は各々領域$\mathcal{D}_1$に対応する変数Ⅰと定数Ⅰ．
a（対象定数）		
2、$f(t_1, ---, t_n)$		$f^*(t_1^*, ---, t_n^*)$
（n変数関数）		f^*は$\mathcal{D}_1^n$から$\mathcal{D}_1$への一意写像を表わす関数記号Ⅰ
3、$P(t_1, ---, t_n)$		$P^*(t_1^*, ---, t_n^*, K)$
（n変数述語）		Kは領域$\mathcal{D}_2$に対応する変数Ⅱ．

Rule3を適用する際、同一wff内において、述語の$n+1$番目のargumentに現われる変数Ⅱは、すべて同一でなくてはならない．

4、Aをwffとすると、　　$(\sim A)^* = \sim A^*$

5、A, Bをwffとすると、　　$(A \vee B)^* = A^* \vee B^*$

6、Aをwff、xを対象変数とすると、　　$((\forall x)A)^* = (\forall \overset{*}{x})A^*$

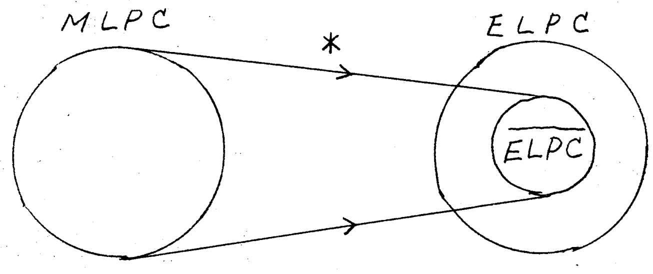
7、Aをwffとすると、　　$(NA)^* = (\forall K)A^*$

Rule 7を適用する際、全称化される変数ⅡKは、A^*内の変数Ⅱと同一でなくてはならない.

2.2〔翻訳規則＊の完全性〕

2.1で示したRule＊の完全性を評価する.

MLPCのすべてのwff Pの＊翻訳P^*と、ELPCの公理と推論規則よりなるELPCの部分言語の体系を$\overline{ELPC}$とする.



$\overline{ELPC}$は、n変数述語のn番目のargumentのみが変数Ⅱであり、他の定数Ⅱ, 関数記号Ⅱは現われない. このとき、＊翻訳の逆翻訳として$-*$を考え、MLPCにおいてwff Pが定理であることと、$\overline{ELPC}$においてwff P^*が定理であることが同値であることを示す. このためには、MLPCの公理と、

推論規則の＊翻訳が、$\overline{ELPC}$ の定理と推論規則であり、$\overline{ELPC}$ の公理と推論規則の一＊翻訳が、MLPC の定理と推論規則となることを示せばよい．

［Ⅰ］（MLPC）$\vdash P \Rightarrow (\overline{ELPC}) \vdash P^*$

MLPCの公理1.～4.の＊翻訳が、$\overline{ELPC}$ の定理となることは明らか．（なぜなら、MLPCの公理1.～4.と$\overline{ELPC}$の公理1.～4.は同じ．）以下、公理5.～8.について示す．

5、$(x)P(x) \supset P(t)$　（t は $P(x)$ で、x に対し自由．）

$((x)P(x) \supset P(t))^* = (x^*)P^*(x^*, K) \supset P^*(t^*, K)$

$\overline{ELPC}$の公理5より、$\vdash (K)P^*(x^*, K) \supset P^*(t^*, K)$

6、$NP \supset P$

$(NP \supset P)^* = (K)P^*(K) \supset P^*(K)$

$\overline{ELPC}$の公理5より、$\vdash (K)P^*(K) \supset P^*(K)$

7、$N(p \supset q) \supset (Np \supset Nq)$

$(N(p \supset q) \supset (Np \supset Nq))^* = (K)(p^*(K) \supset q^*(K)) \supset ((K)p^*(K) \supset (K)q^*(K))$

$\overline{ELPC}$において、$\vdash (K)(p^*(K) \supset q^*(K)) \supset ((K)p^*(K) \supset (K)q^*(K))$ が成り立つ．

8、$\Diamond P \supset N \Diamond P$

$(\Diamond P \supset N \Diamond P)^* = (\exists K)P^*(K) \supset (K)(\exists K)P^*(K)$

$\overline{ELPC}$において、$\vdash (\exists K)P^*(K) \supset (\exists K)P^*(K)$

推論規則1より、$\vdash (\exists K) P^*(K) \supset (K)(\exists K) P^*(K)$

$MLPC$ の推論規則1, 2と、$\overline{ELPC}$ の推論規則1, 2は同じだから、$MLPC$ の推論規則1, 2の＊翻訳は、$\overline{ELPC}$ の推論規則となる。次に $MLPC$ の推論規則3について。

3、 $\vdash P \longrightarrow \vdash NP$

$(\vdash P \longrightarrow \vdash NP)^* = \vdash P^*(K) \longrightarrow \vdash (K) P^*(K)$ を示す。

仮定. $\vdash P^*(K)$ - - - (1)

$\overline{ELPC}$ において、$\vdash P^*(K) \supset ((\exists K) P^*(K) \supset P^*(K))$

MP より、 $\vdash (\exists K) P^*(K) \supset P^*(K)$

推論規則1より、$(\exists K) P^*(K)$ において、K は自由でないから、 $\vdash (\exists K) P^*(K) \supset (K) P^*(K)$ - - - (2)

$\overline{ELPC}$ において、$\vdash P^*(K) \supset (\exists K) P^*(K)$ - - - (3)

(2), (3)より、 $\vdash P^*(K) \supset (K) P^*(K)$ - - - (4)

(1), (4)より MP. $\vdash P^*(K) \longrightarrow \vdash (K) P^*(K)$

これで、$(MLPC) \vdash P \Rightarrow (\overline{ELPC}) \vdash P^*$ が示された。

〔Ⅱ〕、$(\overline{ELPC}) \vdash P \Rightarrow (MLPC) \vdash P^{-*}$

〔Ⅰ〕と同じく、$\overline{ELPC}$ の公理1.～4.の(－＊)翻訳が、$MLPC$ の定理となることは明らか。以下、公理5, 5′について示す。

5、$(x) P(x, K) \supset P(t, K)$ （t は $P(x, K)$ の中で、x に対し自由.）

$((x) P(x, K) \supset P(t, K))^{-*} = (x^{-*}) P^{-*}(x^{-*}) \supset P^{-*}(t^{-*})$.

MLPCの公理5より、$\vdash (x^{-*})P^{-*}(x^{-*}) \supset P^{-*}(t^{-*})$は明らか.

5′. $(K)P(K) \supset P(t')$ （t'は$P(K)$の中で、Kに対し自由.）

$((K)P(K) \supset P(t'))^{-*} = NP^{-*} \supset P^{-*}$

MLPCの公理6より、$\vdash NP^{-*} \supset P^{-*}$

$\overline{ELPC}$の推論規則の$(-*)$翻訳が、MLPCの推論規則となることを示そう.

1. $\vdash P \supset g \longrightarrow \vdash P \supset (x)g$ （xはPで自由でない.）

MLPCの推論規則1より、

$\vdash P^{-*} \supset g^{-*} \longrightarrow \vdash P^{-*} \supset (x)g^{-*}$ は明らか.

1′. $\vdash P \supset g \longrightarrow \vdash P \supset (K)g$ （KはPで自由でない.）

MLPCの推論規則3より、

$\vdash P^{-*} \supset g^{-*} \longrightarrow \vdash N(P^{-*} \supset g^{-*})$

また、MLPCの公理7より、

$\vdash N(P^{-*} \supset g^{-*}) \supset (NP^{-*} \supset Ng^{-*})$

$\therefore \vdash P^{-*} \supset g^{-*} \longrightarrow \vdash NP^{-*} \supset Ng^{-*}$

ここで、すべてのwff Pに対し、$NP^{-*} \equiv P^{-*}$ を示す.

(a) Pが $g_1 \cdots g_m R$ のとき、

（g_i $(1 \leq i \leq m)$ は、限定記号.
Rは、Kを含む原子式または原子式の否定.）

$P^{-*} = g_1^{-*} \cdots g_m^{-*} R^{-*}$

PにおいてKが自由でないから、$g_1^{-*} \cdots g_m^{-*}$ の中に、

少くとも1個の様相記号（N, $\Diamond$）が存在する．

従って、第3章の〔定理〕より、

$$N g_1^{-*} \cdots g_m^{-*} R^{-*} \equiv g_1^{-*} \cdots g_m^{-*} R^{-*}$$

が証明される．

$$\therefore \quad NP^{-*} \equiv P^{-*}$$

(b) Pが、$g_1^1 \cdots g_k^1 R_1 \vee g_1^2 \cdots g_l^2 R_2$ のとき、

$\left\{ \begin{array}{l} g_i^j \text{ は、限定記号.} \\ R_1, R_2 \text{ は} K \text{を含む原子式または原子式の否定.} \end{array} \right.$

$$P^{-*} = g_1^{1-*} \cdots g_k^{1-*} R_1^{-*} \vee g_1^{2-*} \cdots g_l^{2-*} R_2^{-*}$$

$g_1^{1-*} \cdots g_k^{1-*}$, $g_1^{2-*} \cdots g_l^{2-*}$ の中に、各々様相記号が、一個以上含まれる．これらの並びで、最も初めにある様相記号を、それぞれM_1, M_2とすると、

$$P^{-*} = g_1^{1-*} \cdots M_1 \cdots g_k^{1-*} R_1^{-*} \vee g_1^{2-*} \cdots M_2 \cdots g_l^{2-*} R_2^{-*}$$

となり、次のように変形できる．

$$g_1^1 \cdots g_i^1 (M_1 g_1^2 \cdots g_j^2 R_1^{-*} \vee M_2 g_1^3 \cdots g_n^3 R_2^{-*})$$

$\left\{ \begin{array}{l} g_1^1 \cdots g_i^1 \text{ は、} M_1, M_2 \text{ より左にある限定記号.} \\ g_1^2 \cdots g_j^2 \text{ は} M_1 \text{の右にある限定記号または様相記号.} \\ g_1^3 \cdots g_n^3 \text{ は} M_2 \text{の右にある限定記号または様相記号.} \end{array} \right.$

このとき、MLPCの次の定理より、

$$\vdash NP \vee Nq \equiv N(p \vee Nq)$$

$$\vdash NP \vee \Diamond q \equiv N(p \vee \Diamond q)$$

$$\vdash \Diamond p \vee \Diamond q \equiv \Diamond (p \vee q)$$

P^{-*}が$q_1^1 \cdots q_i^1$の次に様相記号が続く式に変形できる.

$$P^{-*} = q_1^1 \cdots q_i^1 M (R' \vee R'')$$

（Mは、Nまたは$\Diamond$）

従って、$NP^{-*} = Nq_1^1 \cdots q_i^1 M (R' \vee R'')$.

第3章の[定理]より、

$$Nq_1^1 \cdots q_i^1 M (R' \vee R'') \equiv q_1^1 \cdots q_i^1 M (R' \vee R'')$$

$$\therefore \quad NP^{-*} \equiv P^{-*}$$

(c)　Pが、$q_1^1 \cdots q_k^1 R_1 \wedge q_1^2 \cdots q_l^2 R_2$のとき、

$$\begin{cases} q_i^j \text{ は、限定記号.} \\ R_1, R_2 \text{は、} K \text{を含む原子式またはその否定.} \end{cases}$$

$$P^{-*} = q_1^{1-*} \cdots q_k^{1-*} R_1^{-*} \wedge q_1^{2-*} \cdots q_l^{2-*} R_2^{-*}$$

(b)の場合と同様、MLPCの次の定理より、

$$\vdash Np \wedge Nq \equiv N(p \wedge q)$$

$$\vdash \Diamond p \wedge Nq \equiv \Diamond (p \wedge Nq)$$

$$\vdash \Diamond p \wedge \Diamond q \equiv \Diamond (p \wedge \Diamond q)$$

$$P^{-*} = q_1^1 \cdots q_i^1 M (R' \wedge R'')$$

（Mは、Nまたは$\Diamond$）

従って、$NP^{-*} = Nq_1^1 \cdots q_i^1 M (R' \wedge R'')$.

第3章の[定理]より、

$$Nq_1^1 \cdots q_i^1 M (R' \wedge R'') \equiv q_1^1 \cdots q_i^1 M (R' \wedge R'')$$

$$\therefore \quad NP^{-*} \equiv P^{-*}$$

(d)　(a), (b), (c)より、$q_1 \cdots q_m R$, $q_1^1 \cdots q_k^1 R_1 \vee q_1^2 \cdots q_l^2 R_2$, $q_1^1 \cdots q_k^1 R_1 \wedge q_1^2 \cdots q_l^2 R_2$ より構成できるすべての$\overline{ELPC}$のwff P に対し、$NP^{-*} \equiv P^{-*}$ が証明された.

$\overline{ELPC}$のwff Pが、$\wedge$, $\vee$, $\sim$で表現できることは明らか.
従って、すべての$\overline{ELPC}$のwff Pに対し、

$$NP^{-*} \equiv P^{-*}$$

$\therefore$ $\vdash P^{-*} \supset q^{-*} \longrightarrow \vdash P^{-*} \supset Nq^{-*}$ が成り立つ.

2、$\vdash P$, $\vdash P \supset q \rightarrow \vdash q$

MLPCにおいて、$\vdash P^{-*}$, $\vdash P^{-*} \supset q^{-*} \rightarrow \vdash q^{-*}$は明らか.

以上のことより、$(\overline{ELPC}) \vdash P \Rightarrow (MLPC) \vdash P^{-*}$.

〔1〕, 〔2〕より、MLPCにおいて、wff Pが定理であることと、$\overline{ELPC}$において、wff P^*が定理であることが同値となることが証明された.

第3章

この章では、次章で述べる定理証明のために、MLPCのwffに対し、ある標準形を考える. この標準形は、その中で、様相記号の個数が、できるだけ少くなるように作られる.

3.1 〔MLPCの標準形の作成〕

まず、いくつかのMLPCの定理を示し、これらをもとに、標準形を作成する．定理の詳細な証明は、略してある．

（Eq）（同値定理）

A, B, C, Dを、各々MLPCのwffとするとき、$\vdash A$であり、Aが、そのwell formed partとしてDをもっているのに対し、BがCをもっているという点でのみ、AとBが異なるとすると、$\vdash C \equiv D$が成り立つなら、$\vdash B$である．

〔証明〕 MLPCのwffの構成に関する帰納法による．詳細は略．

(T1) $N \Diamond P \equiv \Diamond P$ (T2) $\Diamond NP \equiv \Diamond P$

(T3) $NNP \equiv NP$ (T4) $\Diamond\Diamond P \equiv \Diamond P$

(T5) $(x)NP(x) \equiv N(x)P(x)$

(T6) $\Diamond(\exists x)P(x) \equiv (\exists x)\Diamond P(x)$

(T7) $\Diamond(x)P(x) \supset (x)\Diamond P(x)$

(T8) $(\exists x)NP(x) \supset N(\exists x)P(x)$

(T9) $N(x)NP(x) \equiv (x)NP(x)$

(T10) $\Diamond(\exists x)\Diamond P(x) \equiv (\exists x)\Diamond P(x)$

(T11) $N(x)\Diamond P(x) \equiv (x)\Diamond P(x)$

(T12) $\Diamond(\exists x)NP(x) \equiv (x)NP(x)$

(T13) $\Diamond(x)NP(x) \equiv (x)NP(x)$

(T14) $N(\exists x)\Diamond P(x) \equiv (\exists x)\Diamond P(x)$

(T15) $\Diamond(x)\Diamond P(x) \equiv (x)\Diamond P(x)$

(T16) $N(\exists x)NP(x) \equiv (\exists x)NP(x)$

〔証明略〕

〔定理〕

一般に、次のMLPCの式を考える.

$$M_1 Q_1 --- M_k Q_k P \qquad --- (1)$$

ここで、$M_i\,(1 \leq i \leq k)$は、様相記号の連続した並び、

または空. $M_i = M_{i1} --- M_{in_i}$

$M_{ij}\ (1 \leq j \leq n_i)$は、Nまたは◇または空.

$Q_i\ (1 \leq i \leq k)$は、全称記号と存在記号の

連続した並び、または空.

$Q_i = (q_{i1}x_{i1}) --- (q_{im_i}x_{im_i})$

$q_{ij}x_{ij}\,(1 \leq j \leq m_i)$は、$\forall x_{ij}$ または $\exists x_{ij}$

または空.

Pは、MLPCの任意のwff.

$M_1Q_1 --- M_kQ_k$は、様相記号と限定記号の混在する一般的な並びを表わしている.

このとき、次の式が成り立つ.

$$M_1Q_1 --- M_kQ_kP \equiv Q_1Q_2 --- Q_{k-1}M_{kn_k}Q_kP$$

つまり、様相記号と限定記号の並び（$M_1Q_1 --- M_kQ_k$）の中で、最もPに近い様相記号一個を残し、他の様相記号が消去できる.

〔証明〕

まず、(1)式において、様相記号の連続した並び、$M_1, ---, M_k$ が、各々様相記号一個で置きかわることを示す.

$$(1)式 \equiv M_{1n_1}Q_1M_{2n_2}Q_2 --- Q_{k-1}M_{kn_k}Q_kP \quad --- \quad (2)$$

を示す.

(1)式を、$M_{11}M_{12} --- M_{1n_1}QP$ とおく.

（ここで、Q は、$Q_1M_2Q_2 --- M_kQ_k$）

(T1)〜(T4),(E8) より、次の各式が成り立つ.

$$M_{11}M_{12} --- M_{1n_1}QP \equiv M_{12} --- M_{1n_1}QP$$

$$M_{12} --- M_{1n_1}QP \equiv M_{13} --- M_{1n_1}QP$$

$$\vdots$$

$$M_{1n_1-1}M_{1n_1}QP \equiv M_{1n_1}QP$$

$$\therefore \quad M_{11}M_{12} -- M_{1n_1}QP \equiv M_{1n_1}QP \quad --- \quad (3)$$

また、一般に次のような(1)式の well formed part に対しても、(3)式のような式が成り立つ.

(1)式の well formed part として $M_iQ_i --- M_kQ_kP$、つまり、$M_{i1} --- M_{in_i}Q_i --- M_kQ_kP$ を考えると、(3)式を証明したのと同様にして、すべての $i\ (1 \leq i \leq k)$ に対し、

$$M_{i1} \cdots M_{in_i} Q_i \cdots M_k Q_k P \equiv M_{in_i} Q_i \cdots M_k Q_k P$$

が証明され、同値定理を使えば、(2)式が証明される.

次に、

$$M_{1n_1} Q_1 M_{2n_2} \cdots Q_{k-1} M_{kn_k} Q_k P \quad \cdots \quad (4)$$

(4)式$\equiv Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-1} M_{kn_k} Q_k P$ を示す.

(4)式を、$M_{1n_1}(q_{11}\, x_{11}) \cdots (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$ とおく.

（ここで、Qは、$Q_2 M_{3n_3} \cdots Q_{k-1} M_{kn_k} Q_k$.）

$(T9) \sim (T16)$ と (Eq) より、

$$M_{1n_1}(q_{11}\, x_{11}) \cdots (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$$

$$\equiv M_{1n_1}(q_{11}\, x_{11}) \cdots (q_{1m_1-1}\, x_{1m_1-1}) L_1 (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$$

（ここで、$L_i\ (1 \leq i \leq m_1 - 1)$ は、Nまたは$\Diamond$）

$$\equiv M_{1n_1}(q_{11}\, x_{11}) \cdots L_2 (q_{1m_1-1}\, x_{1m_1-1}) L_1 (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$$

$$\vdots$$

$$\equiv M_{1n_1}(q_{11}\, x_{11}) L_{m_1-1} (q_{12}\, x_{12}) L_{m_1-2} \cdots L_1 (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$$

また、

$$M_{1n_1}(q_{11}\, x_{11}) L_{m_1-1} (q_{12}\, x_{12}) L_{m_1-2} \cdots L_1 (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$$

$$\equiv (q_{11}\, x_{11}) L_{m_1-1} (q_{12}\, x_{12}) L_{m_1-2} \cdots L_1 (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$$

$$\equiv (q_{11}\, x_{11}) (q_{12}\, x_{12}) L_{m_1-2} \cdots L_1 (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$$

$$\vdots$$

$$\equiv (q_{11}\, x_{11}) \cdots (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$$

$$\therefore\ M_{1n_1}(q_{11}\, x_{11}) \cdots (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$$

$$\equiv (q_{11}\, x_{11}) \cdots (q_{1m_1}\, x_{1m_1}) M_{2n_2} Q P$$

$\therefore\quad M_{1n_1}Q_1M_{2n_2}\cdots M_{kn_k}Q_kP$

$\equiv Q_1M_{2n_2}\cdots M_{kn_k}Q_kP$

また、一般に、(4)式の well formed part

$M_{in_i}Q_i\cdots M_{kn_k}Q_kP\quad(1\leq i\leq k-1)$

に対し、同様の操作をくり返すと、

$M_{in_i}Q_iM_{in_i+1}\cdots M_{kn_k}Q_kP$

$\equiv Q_iM_{in_i+1}\cdots M_{kn_k}Q_kP$ が成り立つ.

従って、(Eq)より、

$M_{1n_1}Q_1M_{2n_2}\cdots Q_{k-1}M_{kn_k}Q_kP$

$\equiv Q_1Q_2\cdots Q_{k-1}M_{kn_k}Q_kP$

故に、$M_1Q_1\cdots M_kQ_kP\equiv Q_1Q_2\cdots Q_{k-1}M_{kn_k}Q_kP$ が成り立つ.

〔証明終〕

ここで、この〔定理〕の適用例を一つ挙げる.

$N(\exists x)(y)\Diamond N(\exists z)NN(\exists t)P(x,y,z,t)$ --- (a)

(T2)より

$\equiv N(\exists x)(y)N(\exists z)NN(\exists t)P(x,y,z,t)$

(T3)より

$\equiv N(\exists x)(y)N(\exists z)N(\exists t)P(x,y,z,t)$

(T9)より

$\equiv N(\exists x)N(y)N(\exists z)N(\exists t)P(x,y,z,t)$

(T16)より

$\equiv(\exists x)N(y)N(\exists z)N(\exists t)P(x,y,z,t)$

(T9)より

$\equiv(\exists x)(y)N(\exists z)N(\exists t)P(x,y,z,t)$

(T16)より

$\equiv\underline{(\exists x)(y)(\exists z)N(\exists t)P(x,y,z,t)}$

(a)式に対し、〜〜〜の式が求める適用例である．

(T17) $N(p \vee q) \supset (Np \vee \Diamond q)$

(T18) $N(p \vee Nq) \equiv Np \vee Nq$

(T19) $N(p \vee \Diamond q) \equiv Np \vee \Diamond q$

(T20) $\Diamond(p \wedge \Diamond q) \equiv \Diamond p \vee \Diamond q$

(T21) $\Diamond(p \wedge Nq) \equiv \Diamond p \wedge Nq$

(T22) $N(p \wedge q) \equiv Np \wedge Nq$

(T23) $\Diamond(p \vee q) \equiv \Diamond p \vee \Diamond q$

［証明略］

［標準形作成のアルゴリズム］

MLPC の wff P が、与えられたとする．

（Step 1.）

$A \supset B \equiv \sim A \vee B$, $\sim(\sim A) \equiv A$ をくり返し使って、⊃（含意）と、二重否定を消去する．

（Step 2.）

$\sim(A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$, $\sim(A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$

$\sim(x)P(x) \equiv (\exists x)\sim P(x)$, $\sim(\exists x)P(x) \equiv (x)\sim P(x)$

$\sim NP \equiv \Diamond \sim P$, $\sim \Diamond P \equiv N \sim P$

をくり返し使って、〜（否定）を、原子式の直前にもってくる．

(Step 3.)

wff P のすべての well formed part に対し、〔定理〕を適用し、すべての限定記号と様相記号の混在する並びの中に、様相記号が二個以上現われないようにする.

(Step 4.)

(1) $(Qx)P(x) \vee q \equiv (Qx)(P(x) \vee q)$

(2) $(Qx)P(x) \wedge q \equiv (Qx)(P(x) \wedge q)$

ここで、 Q は $\forall$ または $\exists$、q は x を含まない.

(3) $(x)P(x) \wedge (x)q(x) \equiv (x)(P(x) \wedge q(x))$

(4) $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)q(x) \equiv (\exists x)(P(x) \vee q(x))$

(5) $(Q_1 x)P(x) \vee (Q_2 x)q(x) \equiv (Q_1 x)(Q_2 y)(P(x) \vee q(y))$

(6) $(Q_3 x)P(x) \wedge (Q_4 x)q(x) \equiv (Q_3 x)(Q_4 y)(P(x) \wedge q(y))$

(Q_i $(1 \le i \le 4)$ は $\forall$ または $\exists$, y は $P(x)$ の中に現われない変数.)

(1).～(6). を使い、次の変形を行なう. (Step 1.)～(Step 3.) の変形で、wff P は、次の〔I〕,〔II〕のいずれかの形をしている.

〔I〕 wff P が、$\wedge$, $\vee$ を含まない式のとき、

$P = q_1 \cdots q_i M_1 q_{i+1} \cdots q_n A$

(q_l $(1 \le l \le n)$ は限定記号、M_1 は様相記号)

このときは、この式自身が標準形となる.

〔II〕 wff P の well formed part として、次の二つの形が現われる.

(IIa) $g_1 \cdots g_i M_1 g_{i+1} \cdots g_n A \vee g'_1 \cdots g'_j M_2 g'_{j+1} \cdots g'_m B$

(IIb) $g_1 \cdots g_i M_1 g_{i+1} \cdots g_n A \wedge g'_1 \cdots g'_j M_2 g'_{j+1} \cdots g'_m B$

(ここで、$g_k\, g'_l$ $(1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l \leq m)$ は限定記号、M_1, M_2 は、様相記号または空、A, B は任意の wff)

M_1 または M_2 が空の場合は、以下の変形は行なわない。

(IIa) 式に対し、必要に応じ束縛変数の書き換えを行ない、(1)〜(6) を使うと、

(IIa) $\equiv g''_1 \cdots g''_k (M_1 g_{i+1} \cdots g_n A \vee M_2 g'_{j+1} \cdots g'_m B)$

(ここで、g''_l $(1 \leq l \leq k)$ は限定記号.)

$M_1 = M_2 = N$ のとき、(T18) より、

(IIa) $\equiv g''_1 \cdots g''_k N (g_{i+1} \cdots g_n A \vee N g'_{j+1} \cdots g'_m B)$

$M_1 = M_2 = \Diamond$ のとき、(T23) より、

(IIa) $\equiv g''_1 \cdots g''_k \Diamond (g_{i+1} \cdots g_n A \vee g'_{j+1} \cdots g'_m B)$

$M_1 = N$, $M_2 = \Diamond$ のとき、(T19) より、

(IIa) $\equiv g''_1 \cdots g''_k N (g_{i+1} \cdots g_n A \vee \Diamond g'_{j+1} \cdots g'_m B)$

$M_1 = \Diamond$, $M_2 = N$ のとき、(T19) より、

(IIa) $\equiv g''_1 \cdots g''_k N (g'_{j+1} \cdots g'_m B \vee \Diamond g_{i+1} \cdots g_n A)$

以上のような変形を、(IIa) 式に対し行なう. また、(IIb) 式に対しても、(T20), (T21), (T22) を使い、同様の変形を行

なう.

これらの変形を、wff P の適用できうるすべての well formed part に対し適用し、この結果に、再び(Step3.)を適用する. この操作をくり返し適用する.

(Step1.)〜(Step4.)を、MLPC の wff P に対し、適用して得られた式が、MLPC の wff P に対する標準形である.
(ここで、得られた標準形が、wff P に対し、同値となることは、(Step1.)〜(Step4.)のアルゴリズムより明らか.)

[標準形の作成例]

$\sim(\Diamond N(x)(P(x)\supset Q(x))\supset N(\exists y)\Diamond P(y)\supset(\exists z)\Diamond P(z)))$

(Step1.), (Step2.)を適用、

$\Diamond N(x)(\sim P(x)\vee Q(x))\wedge\Diamond((\exists y)\Diamond P(y)\wedge(z)N\sim Q(z))$

(Step3.)を適用、

$N(x)(\sim P(x)\vee Q(x))\wedge\Diamond((\exists y)\Diamond P(y)\wedge(z)N\sim Q(z))$

(Step4.)を適用、

$N(x)(\sim P(x)\vee Q(x))\wedge\Diamond(\exists y)(z)\Diamond(P(y)\wedge N\sim Q(z))$

$N(x)(\sim P(x)\vee Q(x))\wedge(\exists y)(z)\Diamond(P(y)\wedge N\sim Q(z))$

$\underline{(\exists y)(z)N((x)(\sim P(x)\vee Q(x))\wedge\Diamond(P(y)\wedge N\sim Q(z))}$

〜〜〜 部の式が、求める標準形である.

第4章

第3章で得られたMLPCの標準形に対し、翻訳規則*を適用し、その式に対し、導出原理を使い、定理証明を行なう.

4.1 〔定理証明〕

MLPCの任意のwff P について、P がMLPCで定理であれば、P^*は$\overline{ELPC}$の定理であり、ELPCの定理でもある. また、P がMLPCで定理でなければ、$\overline{ELPC}$の定理でもなく、ELPCの定理でもない. なぜなら、$\overline{ELPC}$とELPCは、公理と推論規則が等しいからである. 従って、MLPCのwff P が定理であることは、ELPCの機械的定理証明(導出原理)によって証明される.

第3章の〔例〕を使い、簡単に導出原理について述べる.

$\Diamond N(x)(P(x) \supset Q(x)) \supset N((\exists y)\Diamond P(y) \supset (\exists z)\Diamond P(z))$ --- (1)

が、MLPCの定理であることを示す.

〔(1)式を否定し、標準形を作る.〕

$(\exists y)(z)N((x)(\sim P(x) \vee Q(x)) \wedge \Diamond(P(y) \wedge N \sim Q(z)))$

〔Rule *適用〕

$(\exists y^*)(z^*)(K)((x^*)(\sim P^*(x^*, K) \vee Q^*(x^*, K)) \wedge (\exists K)(P^*(y^*, K) \wedge (K) \sim Q^*(z^*, K)))$

Rule *の7を適用すると、Kに対し、二重,三重の束縛が生じ

る．導出原理において、この不備を避けるため、すべての原子式に対し、その中の変数IIが、最も内側の限定記号によってのみ、束縛されるようにする．

$$(\exists y^*)(z^*)(K)((x^*)(\sim P^*(x^*, K) \vee Q^*(x^*, K)) \wedge (\exists \mu)(p^*(y^*, \mu) \wedge (\nu) \sim Q^*(z^* \nu)) \quad --- \quad (2)$$

この操作の正当性を、次の例を使い、MLPC のセマンティックスをもとにして示そう．

(例) $N(\exists x)(p(x) \vee \diamond Q(x))$

$$\downarrow *$$

$$(K)(\exists x^*)(P^*(x^*, K) \vee (\exists K) Q^*(x^*, K)$$

$$\downarrow \circledcirc$$

$$(K)(\exists x^*)(P^*(x^*, K) \vee (\exists \mu) Q^*(x^*, \mu))$$

MLPC のモデルを、$< W, R, D, V >$ とする．

$V(N(\exists x)(P(x) \vee \diamond Q(x)), w_i) = 1$ とおくと、

$(\forall w_j | w_i R w_j)(\exists V')(< V'(x), w_j > \in V'(P)$ または、

$(\exists w_k | w_j R w_k)(< V'(x), w_k > \in V'(Q)))$

ここで、$(\forall w_j | w_i R w_j)$ は、“$w_i R w_j$ なるすべての w_j に対し、”を意味し、V' は、x に対する付値のみが V と異なる付値を表わす．

R が同値関係である故、$w_i R w_j$ であるような w_k と、$w_i R w_j$ となるすべての w_j に対し、$w_j R w_k$ となる w_k は同じである．

従って、w_k（$\overline{ELPC}$ では μ）は、$w_j(K)$ に束縛されていないことになり、◎の変形が正しいことがわかる．

〔(2)式に対し、Skolem 化を行ない、節集合作成〕

$$\{\sim P^*(x^*, K) \vee Q^*(x^*, K),\ P^*(a, f'(K)),\ \sim Q^*(z^*, \nu)\}$$

$$\sim P^*(x^*, K) \vee Q^*(x^*, K) \qquad \sim Q^*(z^*, \nu)$$

$$\sim P^*(z^*, \nu) \qquad P^*(a, f'(K))$$

□（空節）

これで、$\Diamond N(x)(P(x) \supset Q(x)) \supset N((\exists y)\Diamond P(y) \supset (\exists z)\Diamond P(z))$ が定理であることが証明された．

第５章

〔跋〕　本研究では、一階様相述語論理のＳ５の体系の、ある完全なモデルをもとに、様相論理の外延的論理への翻訳と、その機械的定理証明を試みたが、他のモデル（各possible worldごとに、異なる対象領域をもつモデル（kripke model. etc））に対しては、外延的論理へのうまい翻訳が存在し、導出原理等の定理証明が可能かどうか、効率的かどうかは、今後、

さらに研究が必要であろう.

〔謝辞〕 本論文を書くにあたり、有益な助言、御指導をいただいた、静岡大学、松本和夫教授に、感謝の意を表わす.

〔参考文献〕

〔1〕 Aldo Bressan : General Interpreted Modal Calculus, Yale Univ. Press, 1972.

〔2〕 G. E. Hughes, M. J. Cresswell : An Introduction to Modal Logic, Methuen & Co. Ltd., 1968.

〔3〕 C. L. Chang, R. C. Lee : Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, Academic Press, 1973.

〔4〕 中松, 鈴木 : "内包の外延への還元可能性について", 京大数理解析研究所講究録 296, 1977.